BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le candidat traite **4 exercices :** les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Exercice 1 commun à tous les candidats (5 points)

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3}.

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est 0,98 (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est 0,995 (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme. On note D l'événement « l'athlète est dopé » et T l'événement « le test est positif ». On admet que la probabilité de l'événement D est égale à $0{,}08$.

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.

2. Démontrer que $P(T) = 0{,}083$.

3. **a.** Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?

b. Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'événement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à 0,95.
Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

Partie B

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est $0{,}103$.

1. Dans cette question **1.**, on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.

a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

b. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

c. Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?

2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'événement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à 0,75 ? Justifier.

Exercice 2 commun à tous les candidats (5 points)

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique.
Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0{,}6 \\ u_{n+1} = 0{,}75\, u_n(1 - 0{,}15\, u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020 + n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x) = 0{,}75x\,(1 - 0{,}15x)$.

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$ et dresser son tableau de variations.

3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. Déterminer la limite l de la suite (u_n).

5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

a. Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.

b. Le biologiste a programmé en langage Python la fonction **menace()** ci-dessous :

```
def menace() :
    u=0.6
    n=0
    while u>0.02
        u=0.75*u*(1-0.15*u)
        n=n+1
    return n
```

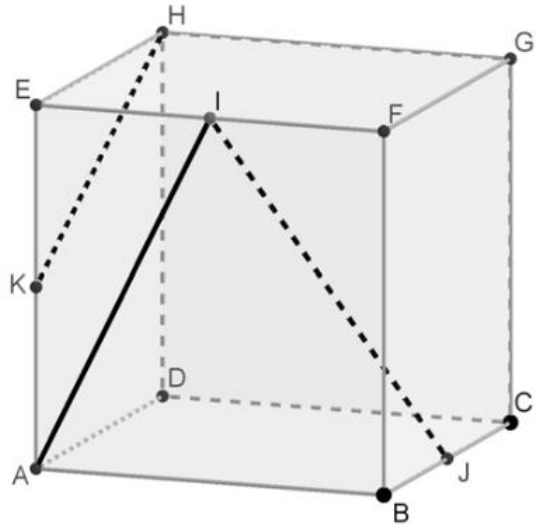
Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction **menace()**.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 commun à tous les candidats (5 points)

Les questions 1. à 5. de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

2. **a.** Donner les coordonnées des points I et J.
   b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

On considère le plan P d'équation $x + 3y - 2z + 2 = 0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 8 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, \ t \in \mathbf{R} \qquad \text{et} \qquad d_2 : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + t \\ z = 8 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbf{R}.$$

3. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan P.

5. Montrer que le point $\mathrm{L}(4, 0, 3)$ est le projeté orthogonal du point $\mathrm{M}(5, 3, 1)$ sur le plan P.

Exercice au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Exercice A

Principaux domaines abordés :
• **Fonction exponentielle** • **Convexité**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. On justifiera chaque réponse.

Affirmation 1 : Pour tous réels a et b, $\left(\mathrm{e}^{a+b}\right)^2 = \mathrm{e}^{2a} + \mathrm{e}^{2b}$.

Affirmation 2 : Dans le plan muni d'un repère, la tangente au point A d'abscisse 0 à la courbe représentative de la fonction f définie sur **R** par $f(x) = -2 + (3 - x)\mathrm{e}^x$ admet pour équation réduite $y = 2x + 1$.

Affirmation 3 : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + \frac{3}{x} = 0$.

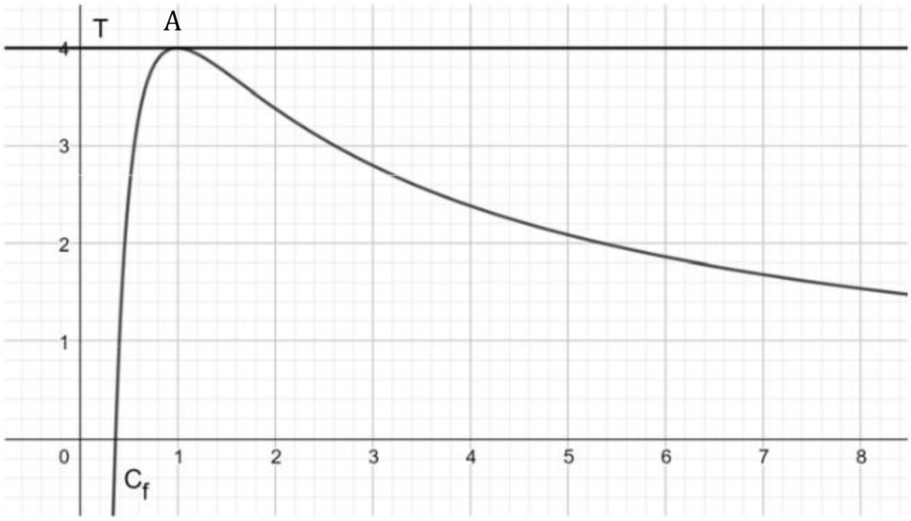
Affirmation 4 : L'équation $1 - x + \mathrm{e}^{-x} = 0$ admet une seule solution appartenant à l'intervalle $[0\,;\,2]$.

Affirmation 5 : La fonction g définie sur **R** par $g(x) = x^2 - 5x + \mathrm{e}^x$ est convexe.

Exercice B

Principaux domaines abordés :
- **Fonction logarithme népérien**
- **Convexité**

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe C_f représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. La courbe C_f admet une tangente horizontale T au point $A(1, 4)$.



1. Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x} \qquad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{b-a-b\ln x}{x^2}.$$

3. En déduire les valeurs des réels a et b.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4\ln x}{x}.$$

4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

5. Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f''(x) = \frac{-4+8\ln x}{x^3}.$$

7. Montrer que la courbe C_f possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.